



Prof. Dr. S. Zacher

Linearisierung von statischen Kennlinien

Beschreibung von linearen und nichtlinearen
regelungstechnischen Grundgliedern

“Die Beschreibung des statischen Verhaltens kann man aus der Differentialgleichung des dynamischen Verhaltens erhalten, indem man alle zeitlichen Ableitungen gleich Null setzt... Das nichtlineare Kennlinienfeld einer Regelstrecke kann durch die Tangente im Arbeitspunkt (X_0, Y_0, Z_0) linearisiert werden... Nach Fourier kann jede periodische Funktion in eine Summe harmonischer Schwingungen zerlegt werden. Die Beschreibungsfunktion berücksichtigt nun lediglich die Grundschiwingung; die höheren harmonischen werden vernachlässigt.“

S. Zacher, M. Reuter: *Regelungstechnik für Ingenieure*,
Seiten 45-48, 275 Springer Vieweg Verlag, 14. Auflage, 2014

Abstract, Urheberrechts- und Haftungshinweis

Man unterscheidet zwischen dem Beharrungszustand (statisches Verhalten) und dem Zeitverhalten (dynamisches Verhalten).

Nachfolgend wird gezeigt, wie die nichtlinearen statischen Kennlinien eines Regelkreisgliedes durch Tangenten ersetzt werden, um die Regelkreisglieder für kleine Abweichungen vom Arbeitspunkt zu linearisieren.

Weiterhin wird gezeigt, wie die statischen Kennlinien unter harmonischen Eingangsschwingungen mittels Fourier-Zerlegung durch die Grundschiwingung ersetzt werden (Harmonische Linearisierung).

Die Herleitung von daraus resultierenden Beschreibungsfunktionen sowie die Stabilitätsanalyse von nichtlinearen Regelkreisen wird hier nicht betrachtet.

Die vorliegende Publikation unterliegt der Urheberrecht. **Alle Rechte sind bei S. Zacher vorbehalten.** Die Weiterentwicklung oder Nutzung der Publikation ohne Referenz auf Urheber ist nicht zugelassen.

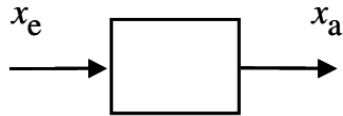
Für die Anwendung der vorliegenden Publikation in der Industrie, im Laborbetrieb und in anderen praktischen Fällen sowie für eventuelle Schäden, die aus unvollständigen oder fehlerhaften Angaben über das dynamische Systeme ergeben können, übernimmt der Autor **keine Haftung.**

INHALT:

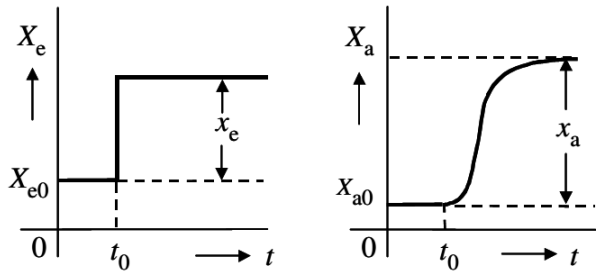
| | |
|---|----------|
| 1. Nichtlineare Regelkreisglieder | Seite 4 |
| 2. Linearisierung in einem Arbeitspunkt..... | Seite 5 |
| 3. Proportionalbeiwerte im Arbeitspunkt | Seite 6 |
| 4. Linearisiertes Regelkreisglied mit Eingangssprüngen..... | Seite 7 |
| 5. Nichtlinearitäten | Seite 8 |
| 5. Linearisiertes Regelkreisglied im Frequenzbereich | Seite 9 |
| 6. Nichtlineares Regelkreisglied im Frequenzbereich | Seite 10 |
| 7. Harmonische Linearisierung | Seite 11 |

Nichtlineare Regelkreisglieder

Ein Regelkreisglied mit Eingang X_e und Ausgang X_a



Zeitverhalten des Regelkreisglied im Arbeitspunkt (X_{e0} , X_{a0})

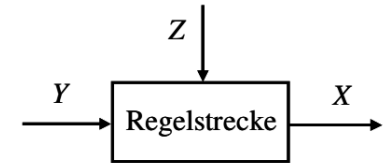


Nach dem Eingangssprung x_e ändert sich der Ausgang von X_{a0} auf einen neuen Wert X_a

$$X_e(t) = X_{e0} + x_e(t)$$

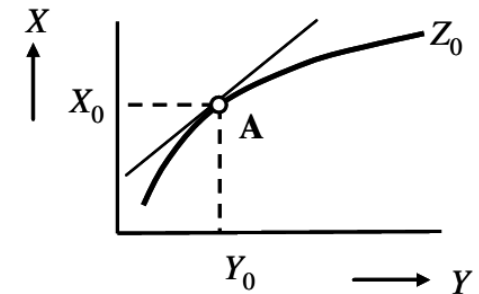
$$X_a(t) = X_{a0} + x_a(t)$$

Regelstrecke



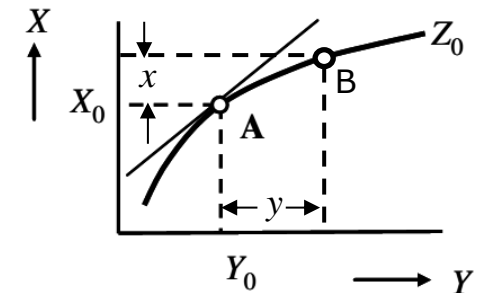
$$X = f(Y, Z)$$

Statische Kennlinie



$$X_B = X_0 + x$$

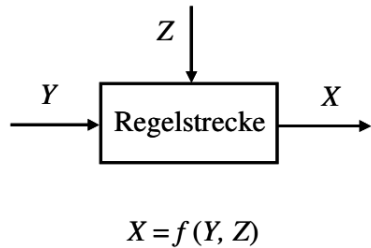
$$Y_B = Y_0 + y$$



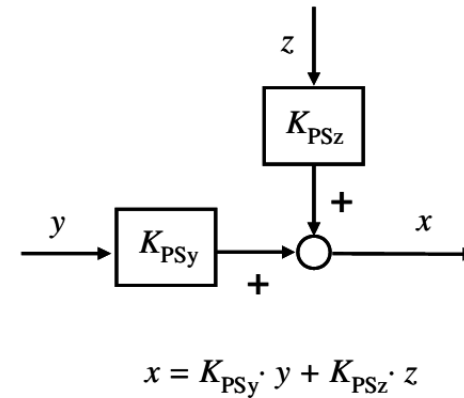
Linearisierung in einem Arbeitspunkt

Die nichtlineare Kennlinie einer Regelstrecke kann durch die Tangente im Arbeitspunkt (Y_0, X_0) ersetzt werden.

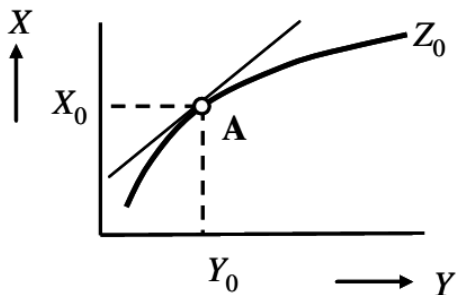
Nichtlineare Regelstrecke



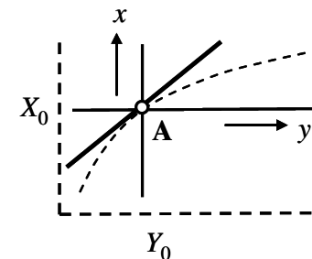
Linearisierte Regelstrecke



Nichtlineare statische Kennlinie und die Tangente im Arbeitspunkt A

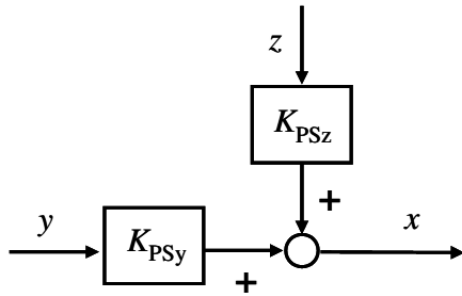


Nichtlineare statische Kennlinie ist durch die Tangente im Arbeitspunkt A ersetzt



Der Koordinatenanfang ist in Arbeitspunkt verschoben.

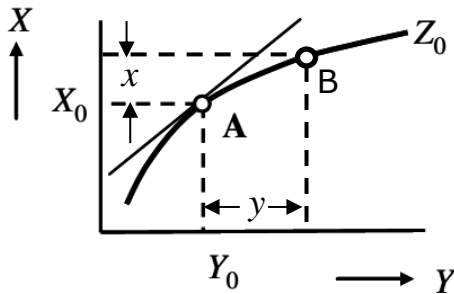
Proportionalbeiwerte der linearisierten Strecke im Arbeitspunkt



$$x = K_{PSy} \cdot y + K_{PSz} \cdot z$$

$$K_{PSy} = \left(\frac{\partial X}{\partial Y} \right)_0 \quad K_{PSz} = \left(\frac{\partial X}{\partial Z} \right)_0$$

K_{PSy} ist die Steigung der Tangente in Arbeitspunkt A.



Beispiel

Eine Regelstrecke, die durch die Differentialgleichung

$$T_2^2 \cdot \ddot{X}(t) + T_1 \cdot \dot{X}(t) + X(t) = 3 \cdot Y^2(t) + 5 \cdot \sqrt{Z(t)}$$

beschrieben wird, soll im Arbeitspunkt

$$Y_0 = 2 \quad \text{und} \quad Z_0 = 4$$

linearisiert bzw. in der Form $x = K_{PSy} \cdot y + K_{PSz} \cdot z$ dargestellt werden.

Für das statische Verhalten sind $\ddot{X}(t) = 0$ und $\dot{X}(t) = 0$. Aus der Gl. (2.51) ergibt sich

$$X = 3 \cdot Y^2 + 5 \cdot \sqrt{Z}.$$

Die gesuchten Proportionalbeiwerte sind partielle Ableitungen im Arbeitspunkt:

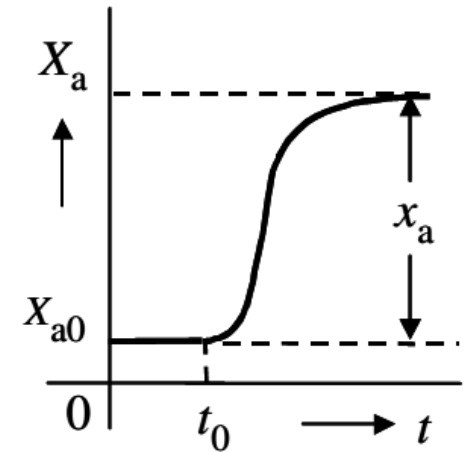
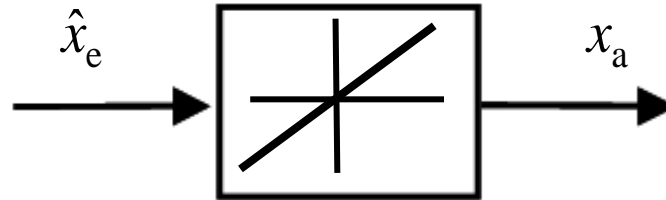
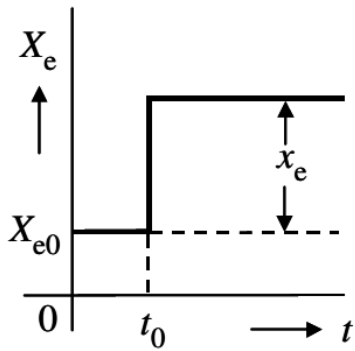
$$K_{PSy} = \left(\frac{\partial X}{\partial Y} \right)_0 = (2 \cdot 3 \cdot Y)_0 = 2 \cdot 3 \cdot Y_0 = 12$$

$$K_{PSz} = \left(\frac{\partial X}{\partial Z} \right)_0 = \left(5 \cdot \frac{1}{2\sqrt{Z}} \right)_0 = 5 \cdot \frac{1}{2\sqrt{Z_0}} = 1,25.$$

Bestimmen Sie K_{PSy} bzw. die Steigung der Tangente im Arbeitspunkt B mit

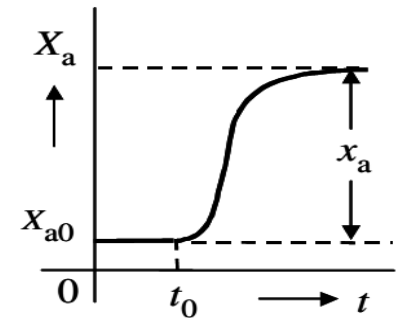
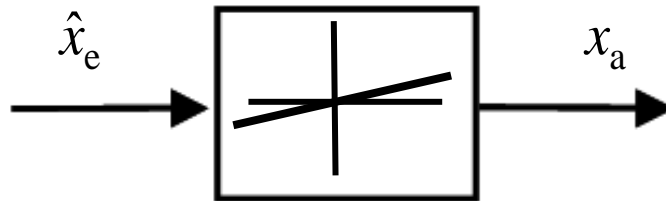
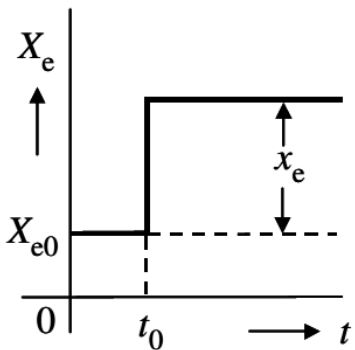
$$Y_B = 5 \quad \text{und} \quad Z_B = 4$$

Linearisiertes Regelkreisglied mit Eingangssprüngen



Nach dem Eingangssprung x_e im Arbeitspunkt A erreicht der Ausgang bei $t \rightarrow \infty$

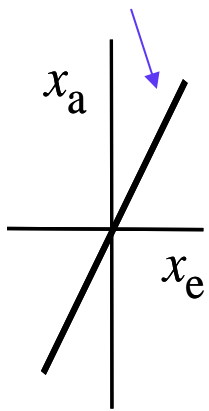
einen Beharrungswert $x_a(\infty) = K_{PSy} \hat{x}_e$



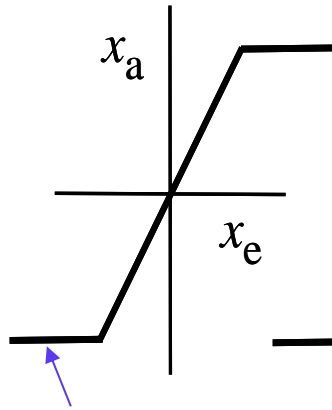
Nach dem Eingangssprung x_e im Arbeitspunkt B erreicht der Ausgang bei $t \rightarrow \infty$ einen anderen Beharrungswert x_e

Nichtlinearitäten

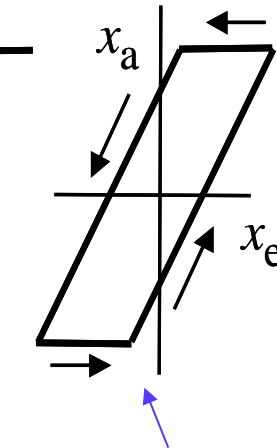
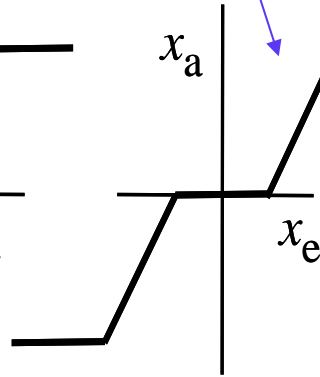
Linear



Ansprechempfindlichkeit mit Begrenzung (dead Zone)

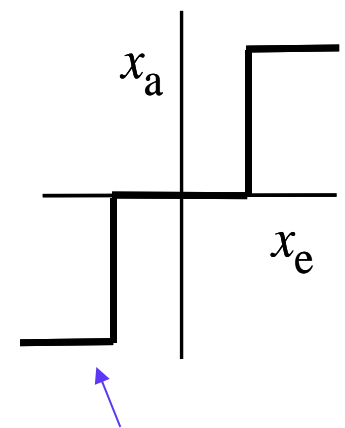
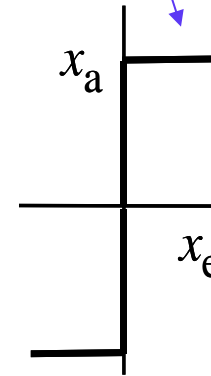


Begrenzung (Sättigung)

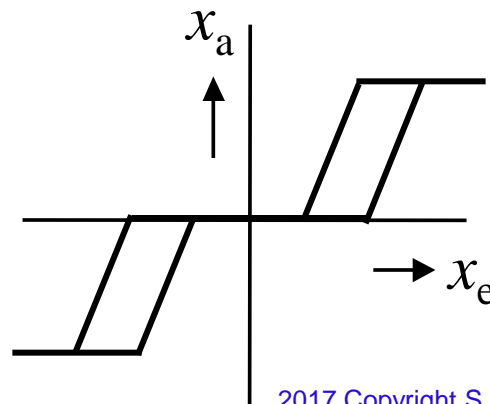


Hysterese

Zweipunkt



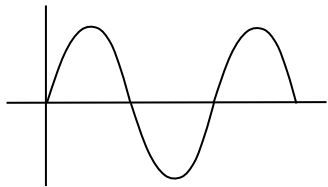
Dreipunkt



Kennlinie mit Sättigung, toter Zone und Hysterese

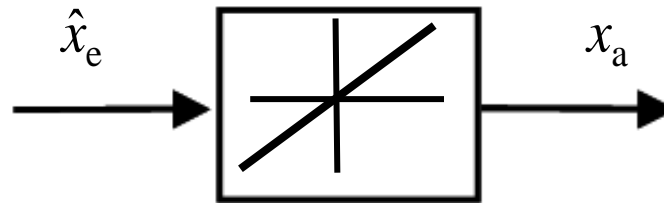
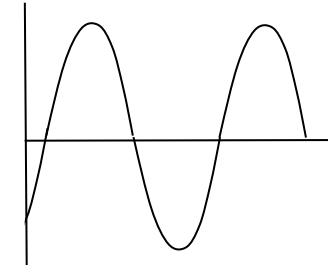
Linearisiertes Regelkreisglied im Frequenzbereich

$$x_e(t) = \hat{x}_e \cdot \sin \omega t$$



$$G(j\omega) = \frac{x_a(j\omega)}{x_e(j\omega)}$$

$$x_a(t) = \hat{x}_a \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$



$$x_e(t) = \hat{x}_e e^{j\omega t}$$

$$x_a(j\omega) = \hat{x}_a e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$G(j\omega) = \operatorname{Re} G(\omega) + j \operatorname{Im} G(\omega)$$

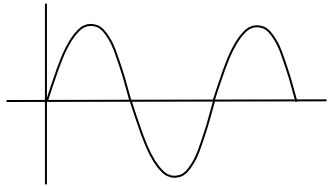
$$G(j\omega) = |G(\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

$$|G(\omega)| = \sqrt{\operatorname{Re}^2 G(\omega) + \operatorname{Im}^2 G(\omega)}$$

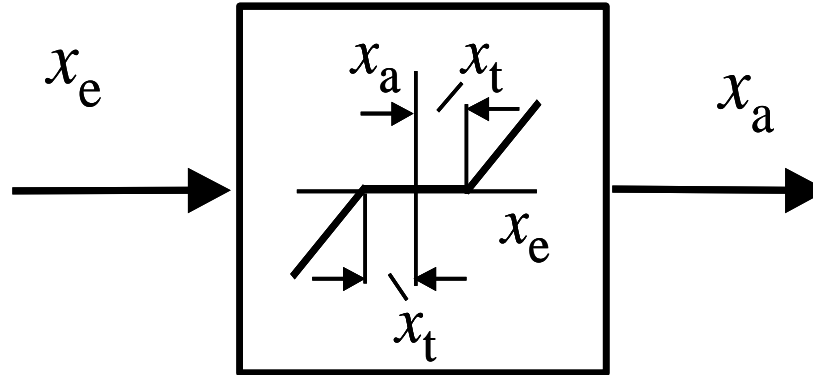
$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{\operatorname{Im} G(\omega)}{\operatorname{Re} G(\omega)}$$

Nichtlineares Regelkreisglied im Frequenzbereich

$$x_e(t) = \hat{x}_e \cdot \sin \omega t$$

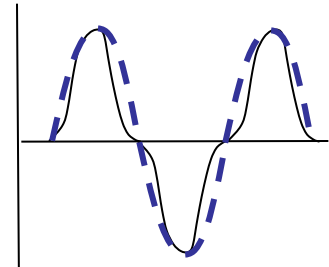


x_e



x_a

$$x_a(t) = f(\hat{x}_e, \omega t)$$



$$N(\hat{x}_e) = \frac{x_{a1}(\omega)}{x_e(\omega)}$$

Die Ausgangsgröße hat zwar gegenüber der Eingangsgröße die gleiche Frequenz und Phasenlage, aber keine Sinusform.

Nach *Fourier* kann jede periodische Funktion in eine Summe harmonischer Schwingungen zerlegt werden.

Die Beschreibungsfunktion N berücksichtigt nun lediglich die Grundschiwingung; die höheren Harmonischen werden vernachlässigt.

Die Beschreibungsfunktion N ist im Gegensatz zum Frequenzgang $G(j\omega)$ keine Funktion von ω . Sie ist nur von der Amplitude der Eingangsgröße \hat{x}_e abhängig.

Harmonische Linearisierung: Ermittlung von Beschreibungsfunktionen

$$\begin{array}{l}
 x_e(t) = \hat{x}_e \cdot \sin \omega t \\
 x_a(t) = f(\hat{x}_e, \omega t) \\
 x_e(\omega t) = \hat{x}_e \cdot e^{j\omega t} \\
 x_{a1}(t) = a_1 \cdot \cos \omega t + b_1 \cdot \sin \omega t
 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l}
 a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x_a(\alpha) \cdot \cos \alpha \cdot d\alpha \\
 b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x_a(\alpha) \cdot \sin \alpha \cdot d\alpha
 \end{array} \right\}
 \quad
 \left. \begin{array}{l}
 a_1 = \frac{2}{T} \int_0^T x_a(t) \cdot \cos \omega t \cdot dt \\
 b_1 = \frac{2}{T} \int_0^T x_a(t) \cdot \sin \omega t \cdot dt
 \end{array} \right\}$$

$\alpha = \omega t$

unabhängig Veränderliche nicht die Zeit t , sondern den Phasenwinkel α

$$\begin{array}{l}
 x_e(t) = \hat{x}_e \cdot \sin \omega t \\
 x_e(\omega t) = \hat{x}_e \cdot e^{j\omega t}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 x_{a1}(\omega t) = a_1 \cdot e^{j\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)} + b_1 \cdot e^{j\omega t} \\
 x_{a1}(\omega t) = (b_1 + ja_1) \cdot e^{j\omega t}
 \end{array}$$

$$N(\hat{x}_e) = \frac{x_{a1}(\omega t)}{x_e(\omega t)} = \frac{(b_1 + ja_1)e^{j\omega t}}{\hat{x}_e e^{j\omega t}}$$

$$N(\hat{x}_e) = \frac{b_1 + ja_1}{\hat{x}_e}$$