Dr. Serge ZACHER VERLAG
Stuttgart
D-70188

Automation-Letter Nr. 2
25.11.2015

Prof. Dr. S. Zacher

Dämpfung

Formelsammlung

„Eine weitere wichtige Größe des Regelkreises ist Dämpfung…“

S. Zacher, M. Reuter: Regelungstechnik für Ingenieure,
Seite 65, Springer Vieweg Verlag,
14. Auflage, 2014

Abstract, Urheberrechts- und Haftungshinweis

Der Dämpfungsgrad (kurz: die Dämpfung) ist ein Regelgüte-Kriterium eines Regelkreises.
Die anderen Regelgütekriterien sind:

- Ausregelzeit
- Anregelzeit
- Maximale Überschwingweite (kurz: Überschwingung)
- Bleibende Regeldifferenz bzw. statischer Fehler

Nachfolgend wird gezeigt, wie die Dämpfung aus verschiedenen Formen der mathemischen Beschreibung eines dynamischen Systems bestimmt werden kann.

Es werden die Zusammenhänge zwischen Dämpfung und Sprungantwort, zwischen Dämpfung und Polstellen sowie zwischen Dämpfung und Koeffizienten des charakteristischen Polynoms des geschlossenen Regelkreises gezeigt.

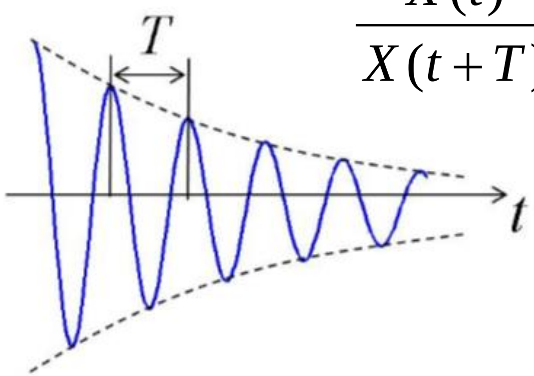
Die Berechnung von Dämpfung wird anhand drei Beispielen verdeutlicht.

Abschließend wird am Beispiel einer PC-Festplatte gezeigt, wie die Übertragungsfunktion, die Dämpfung und die Sprungantwort nach der gegebenen Differentialgleichung bestimmt und mit MATLAB simuliert werden.

Die vorliegende Formelsammlung ist als Hilfe beim Regelungstechnik-Studium konzipiert. Damit kann man einfach und schnell die Dämpfung direkt aus einem charakteristischen Polynom ermitteln.

INHALT

Eine periodische Schwingung kann durch das logarithmische Dekrement Λ charakterisiert werden, nämlich, durch das Verhalten zwischen zwei nacheinander folgenden Amplituden *X*(*t*) und *X*(*t*+*T*):



$$\frac{X(t)}{X(t+T)} = e^{-\delta_e T}$$

$$\ln \frac{X(t)}{X(t+T)} = -\delta_e T$$

$$\Lambda = \vartheta_e T$$

ϑ_e ist die Abklingkonstante

Wenn x_k und x_{k+n} die maximale und die minimale Amplituden einer Schwingung sind und *n* die Anzahl der Halbwellen ist, dann gilt die folgende Formel fürs logarithmische Dekrement:

$$\Lambda = \frac{1}{n} \ln \frac{x_k}{x_{k+n}}$$

2. Logarithmischer Dekrement und Dämpfung

Bei bekanntem zeitlichen Verlauf kann eine Schwingung durch eine andere Größe charakterisiert werden, nämlich, durch die Dämpfung ϑ , die aus dem logarithmischen Dekrement Λ ermittelt werden kann:

$$\Lambda = \ln \frac{X(t)}{X(t+T)} = -\delta T = \frac{2\pi\vartheta}{\sqrt{1-\vartheta^2}} \qquad \vartheta = \frac{\Lambda}{\sqrt{4\pi^2 + \Lambda^2}}$$

Setzt man in diese Formel den Wert des logarithmischen Dekrements ein

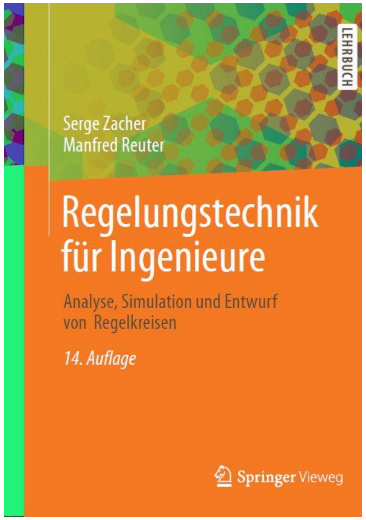
$$\Lambda = \frac{1}{n} \ln \frac{x_k}{x_{k+n}}$$

dann ergibt sich die Beziehung zwischen der Dämpfung ϑ und der Anzahl der Halbwellen *n*:

$$\vartheta = \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{\pi^2}{\left(\ln \dfrac{x_k}{x_{k+1}} \right)^2}}} \Rightarrow n = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{\vartheta^2} - 1}} \Rightarrow \boxed{\vartheta \approx \frac{1}{n}}$$

gilt nur für $0 < \vartheta < 0{,}5$

3. Übertragungsfunktion



Für Entwurf eines Regelkreises ist die Bestimmung der Dämpfung ϑ aus der Differentialgleichung oder Übertragungsfunktion besonders wichtig.

Die Übertragungsfunktion
eines nichtschwingungsfähiges Systems 2. Ordnung

$$G_S(s) = \frac{x(s)}{y(s)} = \frac{K_{PS}}{(1+sT_1)(1+sT_2)}$$

kann wie folgt überschrieben werden:

$$G_S(s) = \frac{K_{PS}}{T_1 T_2} \cdot \frac{1}{s^2 + s \cdot \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} + \frac{1}{T_1 T_2}}$$

In allgemeiner Form gilt für nichtschwingungsfähige sowie für schwingungsfähige Systeme 2. Ordnung:

$$G_S(s) = \frac{K_P}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

Beispiel: $T_2^2 s^2 + T_1 s + 1 \quad \Rightarrow$

$$p_{1,2} = -\frac{T_1}{2T_2^2} \pm \sqrt{\left(\frac{T_1}{2T_2^2}\right)^2 - \frac{1}{T_2^2}}$$

$$p_{1,2} = \frac{1}{T_2}\left(-\frac{T_1}{2T_2} \pm \sqrt{\left(\frac{T_1}{2T_2}\right)^2 - 1}\right)$$

Eigenfrequenz: $\omega_0 = \dfrac{1}{T_2}$

Dämpfung: $\vartheta = \dfrac{T_1}{2T_2} = \dfrac{\omega_0 T_1}{2}$

Charakteristische Gleichung:

$$\frac{1}{\omega_0^2} s^2 + \frac{2\vartheta}{\omega_0} s + 1 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$p_{1,2} = -\vartheta\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1-\vartheta^2}$$

$$p_{1,2} = \omega_0\left(-\vartheta \pm \sqrt{\vartheta^2 - 1}\right)$$

$$p_{1,2} = \delta_e \pm j\omega_e$$

δ_e ist Abklingkonstante

$\omega_e = \omega_0\sqrt{1-\vartheta^2}$ ist Eigenfrequenz

4. Eigenfrequenz und Dämpfung

Beispiel: $\frac{1}{\omega_0^2}s^2 + \frac{2\vartheta}{\omega_0}s + 1 = 0$

Abhängig von Dämpfungsgrad ϑ lassen sich folgende Fälle unterscheiden:

$\vartheta = \frac{T_1}{2T_2} > 1 \Rightarrow T_1 > 2T_2 \Rightarrow p_1 \neq p_2 \Rightarrow$ aperiodisch

negativ reell

$\vartheta = \frac{T_1}{2T_2} = 1 \Rightarrow T_1 = 2T_2 \Rightarrow p_1 = p_2 \Rightarrow$ aperiodischer Grenzfall

negativ reell

$0 < \vartheta < 1 \Rightarrow T_1 < 2T_2 \Rightarrow p_1 \neq p_2 \Rightarrow$ abklingende Schwingung

Konjugiert mit
negativen Reellteilen

$\vartheta = \frac{T_1}{2T_2} = 0 \Rightarrow T_1 = 0 \Rightarrow p_1 = -p_2 \Rightarrow$ ungedämpfte Schwingung

imaginär

Aus dem Zusammenhang zwischen Koeffizienten des charakteristischen Polynoms und Polstellen

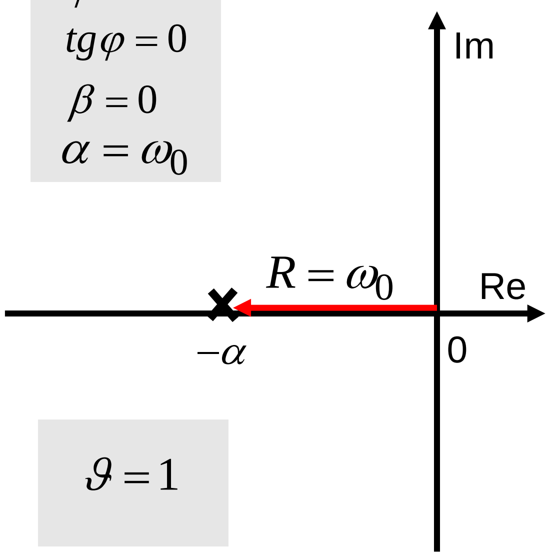
$$\frac{1}{\omega_0^2}s^2 + \frac{2\vartheta}{\omega_0}s + 1 = 0 \qquad\qquad p_{1,2} = -\vartheta\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1-\vartheta^2}$$

folgt: $p_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$ mit $\alpha = -\vartheta\omega_0$, $\beta = \sqrt{1-\vartheta^2}$ ⇒

$$tg\varphi = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\sqrt{1-\vartheta^2}}{\vartheta}$$

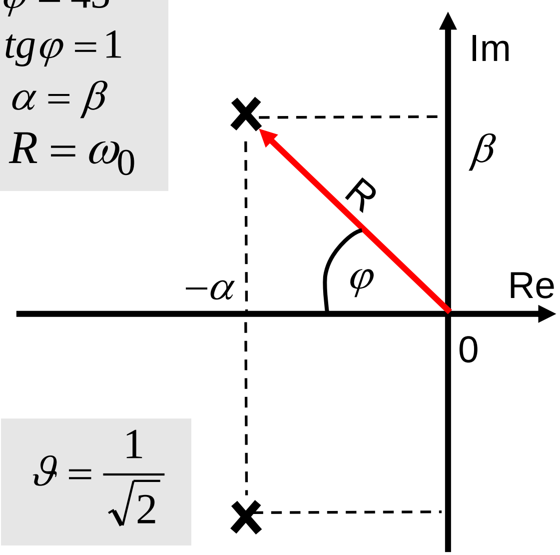
$$R = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \sqrt{(\vartheta\omega_0)^2 + \omega_0^2(1-\vartheta^2)} = \omega_0$$

$\varphi = 0°$, $tg\varphi = 0$, $\beta = 0$, $\alpha = \omega_0$



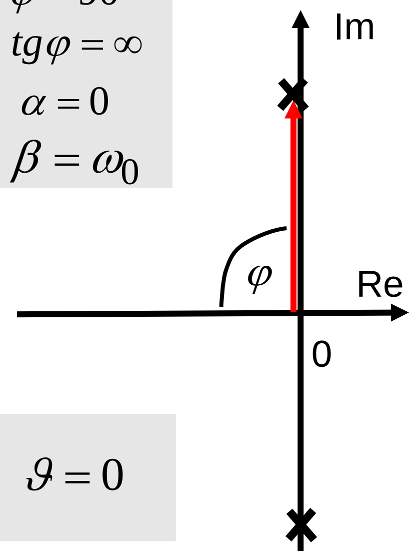
$\vartheta = 1$

$\varphi = 45°$, $tg\varphi = 1$, $\alpha = \beta$, $R = \omega_0$



$\vartheta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\varphi = 90°$, $tg\varphi = \infty$, $\alpha = 0$, $\beta = \omega_0$



$\vartheta = 0$

Das Übergangsverhalten eines Systems 2. Ordnung in allgemeiner Form

$$G_S(s) = \frac{K_{\mathrm{PS}}}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

hängt entscheidend von seinen Polstellen ab:

$$a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

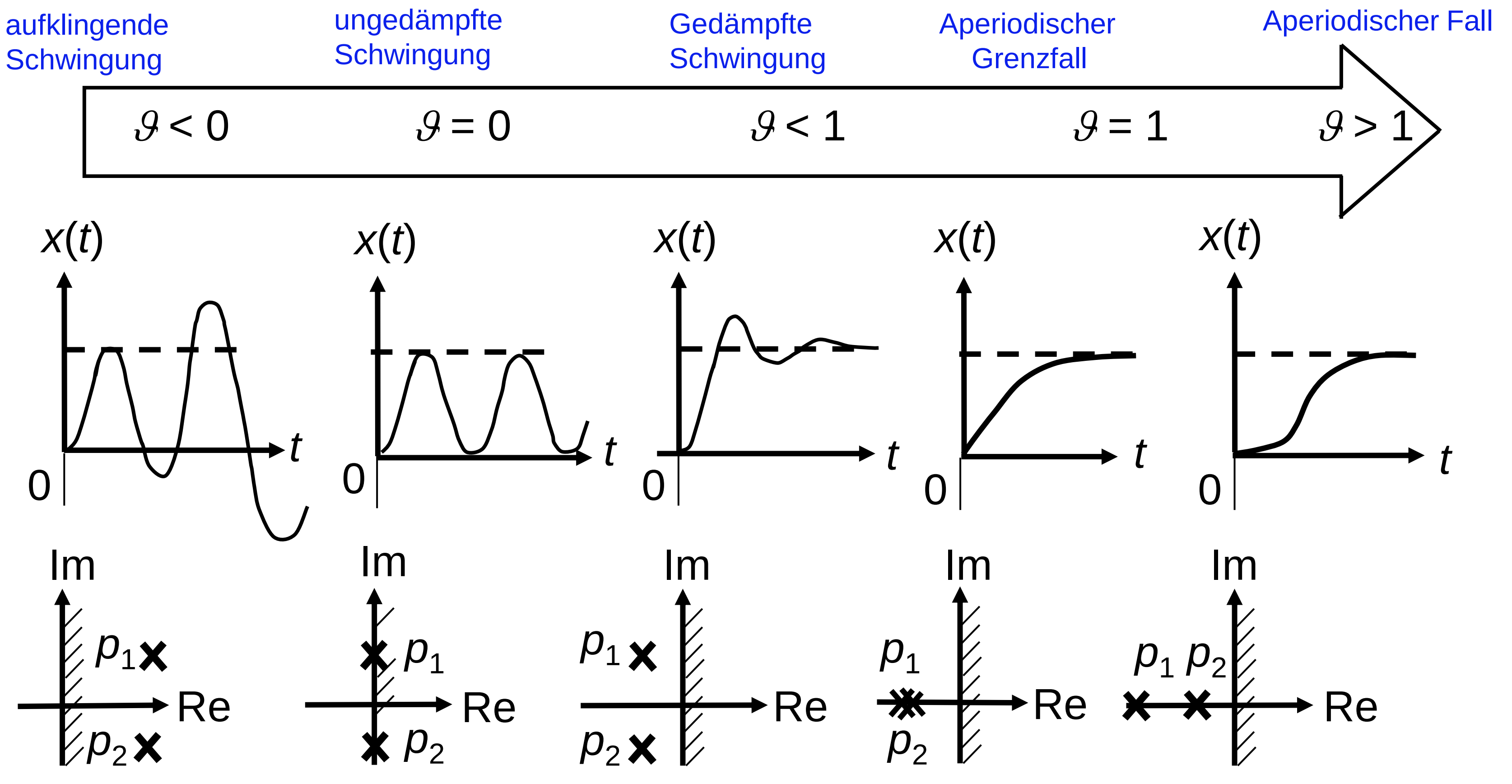
$$p_{1,2} = -\frac{a_1}{2a_2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2 - 4a_0 a_2}$$

Die Polstellen können reell, imaginär oder komplex konjugiert sein.

Wichtig für das Übergangsverhalten eines Systems 2. Ordnung ist auch, ob die Realteile von Polen positiv oder negativ sind:

- Bei positiven reellen Teilen Re >0 ist das System instabil,
- Bei negativen reellen Teilen Re<0 ist das System stabil.

Die Dämpfung ϑ zeigt, wie sich die Amplituden von zwei nacheinander folgenden Halbwellen unterscheiden.



Zwei komplexe Pole mit Re>0	Zwei imaginäre Pole mit Re=0	Zwei komplexe Pole mit Re<0	Zwei gleiche reelle Pole mit Re<0	Zwei reelle Pole mit Re<0
aufklingende Schwingung	ungedämpfte Schwingung	Gedämpfte Schwingung	Aperiodischer Grenzfall	Aperiodischer Fall

Für das charakteristische Polynom in allgemeiner Form

$$a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

mit Polstellen

$$p_{1,2} = -\frac{a_1}{2a_2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2 - 4a_0 a_2}$$

kann die Dämpfung ϑ nach der folgenden Formel bestimmt werden:

$$\vartheta = \sqrt{\frac{\left(\dfrac{a_1}{2a_2}\right)^2}{\dfrac{a_0}{a_2}}} \Rightarrow \vartheta = \frac{a_1}{2\sqrt{a_2 a_0}}$$

9. Charakteristische Polynome

Bekannt sind verschiedene Formen des charakteristischen Polynoms:

$$a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$

$$s^2 + a_1 s + a_0$$

$$a_2 = 1 \qquad a_1 = 2\alpha \qquad a_0 = \beta^2$$

$$a_2 = 1 \qquad a_1 = 2\vartheta\omega_0 \qquad a_0 = \omega_0^2$$

$$a_2 = 1 \qquad a_1 = 2\alpha \qquad a_0 = \alpha^2 + \beta^2$$

$$a_2 s^2 + a_1 s + 1$$

$$a_2 = T^2 \qquad a_1 = 2\vartheta T \qquad a_0 = 1$$

$$a_2 = T_2^2 \qquad a_1 = T_1 \qquad a_0 = 1$$

$$a_2 = \frac{1}{\omega_0^2} \qquad a_1 = \frac{2\vartheta}{\omega_0} \qquad a_0 = 1$$

Zusammenfassung: charakteristische Polynome, Dämpfung und Polstellen

$$s^2 + a_1 s + a_0$$

$$s^2 + 2\alpha \cdot s + \beta^2 \qquad s^2 + 2\vartheta\omega_0 s + \omega_0^2$$

$$\vartheta = \frac{\alpha}{\beta} \qquad \vartheta = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0}}$$

$$a_2 s^2 + a_1 s + 1$$

$$\frac{1}{\omega_0^2} s^2 + \frac{2\vartheta}{\omega_0} s + 1 \qquad T^2 s^2 + 2\vartheta T s + 1$$

$$\vartheta = \frac{a_1}{2\sqrt{a_2}} \qquad \vartheta = \frac{a_1}{2\sqrt{a_2}}$$

$$p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$$

$$p_{1,2} = -\alpha \pm \beta\sqrt{\vartheta^2 - 1}$$

$$p_{1,2} = -\beta\left(\vartheta \pm \sqrt{\vartheta^2 - 1}\right)$$

$$p_{1,2} = -\vartheta\omega_0 \pm \sqrt{(\omega_0\vartheta)^2 - \omega_0^2}$$

$$p_{1,2} = -\vartheta\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\vartheta^2 - 1}$$

$$p_{1,2} = -\omega_0\left(\vartheta \pm \sqrt{\vartheta^2 - 1}\right)$$

$$p_{1,2} = -\frac{\vartheta}{T} \pm \sqrt{\left(\frac{\vartheta}{T}\right)^2 - \frac{1}{T^2}}$$

$$p_{1,2} = -\frac{\vartheta}{T} \pm \frac{1}{T}\sqrt{\vartheta^2 - 1}$$

$$p_{1,2} = -\frac{1}{T}\left(\vartheta \pm \frac{1}{T}\sqrt{\vartheta^2 - 1}\right)$$

Beispiel: $s^2 + 6s + 100$

$$s^2 + a_1 s + a_0$$

$$s^2 + 2\alpha \cdot s + \beta^2$$

$$s^2 + 2\vartheta\omega_0 \cdot s + \omega_0^2$$

$$s^2 + 2\alpha \cdot s + \alpha^2 + \beta^2$$

$$\vartheta = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{3}{10}$$

$$\vartheta = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0}} = \frac{6}{2\sqrt{100}} = \frac{3}{10}$$

$$\vartheta = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \frac{3}{\sqrt{100}} = \frac{3}{10}$$

$\alpha = 3$

$\beta^2 = 100$

$$\omega_0 = \sqrt{100} = 10$$

$\alpha = 3$

$\beta^2 = 91$

$$p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$$

$$p_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9 - 100} = -3 \pm 9{,}6\,j$$

$$p_{1,2} = -\omega_0 \cdot \left(\vartheta \pm \sqrt{\vartheta^2 - 1}\right)$$

$$p_{1,2} = -10 \cdot \left(0{,}3 \pm \sqrt{0{,}3^2 - 1}\right) = -3 \pm 9{,}6\,j$$

$$p_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$$

$$p_{1,2} = -3 \pm 9{,}6\,j$$

Beispiel: $s^2 + 8s + 9$

$$s^2 + a_1 s + a_0$$

$$s^2 + 2\alpha \cdot s + \beta^2$$

$\alpha = 4$

$\beta^2 = 9$

$$\vartheta = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{4}{3}$$

gilt für $\beta > 0$

$$p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$$
$$p_{1,2} = -4 \pm \sqrt{16 - 9}$$
$$p_{1,2} = -4 \pm \sqrt{7}$$

$$s^2 + 2\alpha \cdot s + \beta^2 - \alpha^2$$

$\alpha = 4$

$\beta^2 = 25$

$$\vartheta = \frac{\alpha}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}} = \frac{4}{\sqrt{9}} = \frac{4}{3}$$

gilt für $\alpha < \beta$

$$p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - (\beta^2 - \alpha^2)}$$
$$p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{2\alpha^2 - \beta^2}$$
$$p_{1,2} = -4 \pm \sqrt{2 \cdot 16 - 25}$$
$$p_{1,2} = -4 \pm \sqrt{7}$$

$$s^2 + 2\alpha \cdot s + \alpha^2 + \beta^2$$

$\alpha = 4$

$\beta^2 = -7$

$$\vartheta = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \frac{4}{\sqrt{9}} = \frac{4}{3}$$

gilt für $\alpha^2 + \beta^2 > 0$

$$p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}$$
$$p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{-\beta^2}$$
$$p_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$$
$$p_{1,2} = -4 \pm \sqrt{7}$$

Beispiel: $8s^2 + 4s + 1$

$$a_2 s^2 + a_1 s + 1$$

$$\frac{1}{\omega_0^2} s^2 + \frac{2\vartheta}{\omega_0} s + 1$$

$$T^2 s^2 + 2\vartheta T s + 1$$

$$\vartheta = \frac{a_1}{2\sqrt{a_2}} = \frac{4}{2\sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$T = \frac{1}{\omega_0} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

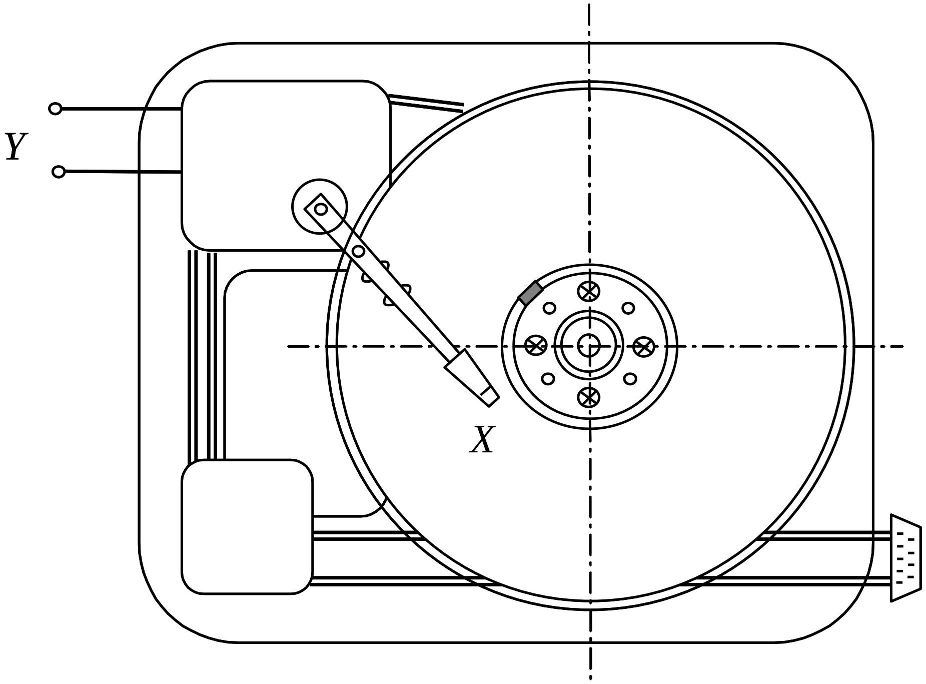
$$p_{1,2} = -\vartheta\omega_0 \pm \sqrt{(\omega_0\vartheta)^2 - \omega_0^2}$$

$$p_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-8} = -2 \pm 2j$$

$$p_{1,2} = -\vartheta\omega_0 \pm \sqrt{(\omega_0\vartheta)^2 - \omega_0^2}$$

$$p_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-8} = -2 \pm 2j$$

Beispiel: Festplatte



Eine PC-Festplatte wird mit der folgenden DGL beschrieben:

$$a_2\ddot{x}(t) + a_1\dot{x}(t) + a_0 x(t) = b_0 \cdot y(t)$$

wobei sind:

$a_2 = 0{,}01$
$a_1 = 0{,}004$
$a_0 = 10$
$b_0 = 0{,}05.$

a) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion der Regelstrecke.

b) Wie groß ist der Dämpfungsgrad der Regelstrecke?

c) Bestimmen Sie die Sprungantwort $x(t)$ der Regelstrecke, wenn die Stellgröße $y(t)$ sprunghaft um $\hat{y} = 1$ geändert wird.

Simulieren Sie die Strecke mit MATLAB und prüfen Sie die Lösung!

a) Übertragungsfunktion

$$a_2\ddot{x}(t) + a_1\dot{x}(t) + a_0 x(t) = b_0 \cdot y(t)$$

$$\frac{a_2}{a_0}\ddot{x}(t) + \frac{a_1}{a_0} a_1\dot{x}(t) + x(t) = \frac{b_0}{a_0} \cdot y(t)$$

$$\frac{a_2}{a_0} = \frac{0{,}01}{10} = 0{,}001 \qquad \frac{a_1}{a_0} = \frac{0{,}004}{10} = 0{,}0004 \qquad \frac{b_0}{a_0} = \frac{0{,}05}{10} = 0{,}005$$

$$0{,}001 \cdot \ddot{x}(t) + 0{,}0004 \cdot \dot{x}(t) + x(t) = 0{,}005 \cdot y(t)$$

$$G_S(s) = \frac{0{,}005}{0{,}001 \cdot s^2 + 0{,}0004 \cdot s + 1}$$

b) Dämpfungsgrad

$$G_S(s) = \frac{0{,}005}{0{,}001 \cdot s^2 + 0{,}0004 \cdot s + 1} \quad \longleftrightarrow \quad G_S(s) = \frac{K_{PS}}{\frac{1}{\omega_0^2} s^2 + \frac{2\vartheta}{\omega_0} s + 1}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\omega_0^2} = 0{,}001 \\ \dfrac{2\vartheta}{\omega_0} = 0{,}0004 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega_0^2 = \dfrac{1}{0{,}001} \\ \dfrac{2\vartheta}{\omega_0} = 0{,}0004 \end{cases}$$

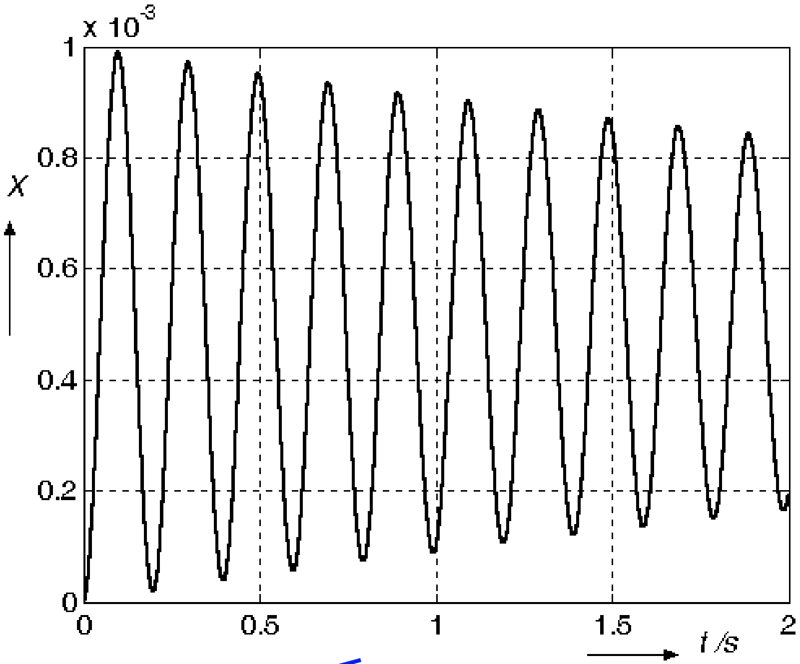
$$\omega_0 = 31{,}6\,\mathrm{s}^{-1}$$

$$\vartheta = 0{,}0062$$

c) Sprungantwort

MATLAB-Skript:

```
Gs = tf (0.005, [0.01, 0.004, 10]);
% b0 = 0,05; a2 = 0,01;
% a1 = 0,004; a0 = 10;
t = 0:0.001:2.0;
% von t = 0 bis t = 2 mit Δt = 0.001
T = t';
x = step (Gs, T);
plot (T, x, 'k'); grid;
```



$$T_d = \frac{2\,\mathrm{sec}}{10} = 0{,}2\,\mathrm{sec}$$

$$\omega_d = \frac{2\pi}{T_d} = 31{,}4 s^{-1} = \omega_0 \sqrt{1-\vartheta^2} \longrightarrow 31{,}6 \cdot \sqrt{1-0{,}0062^2} = 31{,}5$$

$$\omega_0 = 31{,}6\,\mathrm{s}^{-1}$$

$$\vartheta = 0{,}0062$$